**Лекція 3**

**Перестановки з повтореннями**

**Означення**. *Перестановкою з повтореннями з n елементів називається будь-яке впорядкування n - елементної множини, серед елементів якої є однакові*.

Якщо серед елементів *n* - елементної множини М є *n1* елементів першого типу, *n2*- елементів другого типу,..., *nk*- елементів *k*-го типу (n1+n2+...+nk= n) , то кількість усіх перестановок такої множини позначається Рn (n1, n2,..., nk).

**Теорема**. *Для перестановок з повтореннями має місце формула:*

*Рn (n1, n2,..., nk) =* (1)

*Доведення*

Розглянемо яку-небудь з перестановок даної множини і обчислимо скількома способами можна переставляти її елементи так, щоб перестановка не змінилась.

Елементи першого типу можна переставляти n1! способами, другого – n2! способами, . . . , k- того типу - n k! способами.

За правилом добутку в кожній перестановці з повтореннями можна переставляти елементи, не змінюючи перестановку n1! n2!... n k! способами.

Звідси Р n (n1, n 2,..., n k) . n 1! n 2!... n k! = n !

Отже, *Рn (n1, n2,..., nk) =* ,що і потрібно було довести*.*

*Теорему доведено.* ■

*Зауваження****.***

Формула (1) допускає також інше комбінаторне тлумачення:

Рn(n1, n2,..., n k) - *це кількість способів, якими можна здійснити розбиття n –елементної множини М на k множин без спільних елементів.*

***Приклади***

1. Скільки різних “слів” у тому числі і беззмістовних, можна дістати, переставляючи букви у слові “математика” ?

**2**. Скількома способами можна порівну роздати чотирьом гравцям 28 кісточок доміно ?

**Розміщення з повтореннями**

**** Нехай дано множину М, яка містить *n*різних елементів будь-якої природи.

**Означення.** *Розміщенням з повтореннями з n елементів по k (k – довільне натуральне число) називається будь-який впорядкований k елементний набір виду ( а1 ,а2, ...,аk ) , де а1,а2, ...,аk М (а1 ,а2, ...,а k не обов’язково різні )*

 Кількість розміщень з повтореннями з *n*елементів по *k* позначається **** .На відміну від розміщень без повторень, у даному випадку може бути *k  n.*

Розміщення з повтореннями з *n*елементів по *k* називаються також *впорядкованими k- вибірками з поверненням з n-елементної множини*.

Ця назва пояснюється тим, що розміщення з повтореннями можна дістати так: вибрати довільний елемент *а1*М, записати його на першому місці і повернути до множини М; знову вибрати довільний елемент *а2*М (може трапитися, що *а1=а2*), записати його на другому місці і знов повернути до М і т. д. Повторивши цю операцію *k* раз ми дістанемо *k* - вибіркуз множини М.

**Теорема.** *Для довільних натуральних n, k має місце формула*

**=** *n k***(1)**

*Доведення*

Доведемо для довільних натуральних *n, k* таку рекурентну формулу = *n***(\*)**

Дійсно, щоб утворити *(k+1)*- вибірку з n-елементної множини М, досить до *k* вибірки М1*=( а1,а2, ...,аk )* дописати довільний елемент *аk+1*М. Але *k*-вибірку М1 можна вибрати **** способами, а елемент *аk+1*– *n*-способами. За правилом добутку пару (М1,*аk+*1) можна вибрати *n***** способами.

Отже, = *n***.**

Доведемо формулу (1) методом математичної індукції.

1. *k* =1. = *n*1= *n* – формула виконується.
2. Припустимо, що формула виконується для *k*, тобто **=** *n k***.**
3. Доведемо, що формула виконується для *k*+1.

= *n***=** *n n k=nk+1*.

Отже, за принципом математичної індукції формула виконується для довільного натурального *k*.

*Теорему доведено.* ■

***Приклад***

**1.** Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою дев’яти цифр 1, 2, ..., 9, якщо цифри в записі числа можуть повторюватися ?

**Комбінації з повтореннями**

**Означення**. *Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називається будь-який k- елементний набір виду , де кожен з елементів а1 ,а2 , ... ,а k належить до одного з n типів.*

Позначається .

**Теорема**. *При довільних натуральних n і k має місце формула*

***= ****С****=* (1)**

*Доведення*

Для того, щоб задати деяку комбінацію з повтореннями, досить вказати, скільки елементів кожного з n типів входить до неї. Поставимо у відповідність кожній комбінації впорядковану множину, складену з нулів і одиниць, за таким правилом:

пишемо стільки одиниць, скільки елементів першого типу входить у комбінацію, потім пишемо нуль, після цього – стільки одиниць, скільки елементів другого типу входить в комбінацію, потім знову нуль і так далі. Якщо елементи деякого типу зовсім не входять у комбінацію, то пишуть підряд два нулі.

*Приклад.* Розглядаються комбінації з 4 елементів a,b,c,d по 5. Запис 11001110 відповідає комбінації , а запис 10110011 відповідає комбінації -.

Між цими впорядкованими множинами, складеними з нулів і одиниць та комбінаціями з повтореннями встановлюється взаємно однозначна відповідність. Але кожна така впорядкована множина складається з k одиниць і (n–1) нуля. Тому число всіх комбінацій з повтореннями з n елементів по k дорівнює числу різних способів впорядкування (n +k –1) - елементної множини, що складається з k одиниць та (n –1)-го нуля , тобто Рn+k-1 (k,n-1) =, що і потрібно було довести.

*Теорему доведено.* ■

*Приклад*

**1.** Скількома способами можна купити 8 тістечок у кондитерській, де є 6 різних сортів тістечок.

******